

知识点 19~24

【总 览】

知识点 19~24 是围绕相似矩阵及二次型展开的，这一部分是考试的重点和难点。其中，知识点 19 介绍特征值和特征向量的定义和求法（本部分最基础的内容）、特征值与特征向量的 10 个性质（熟练掌握这些性质将会加深对本部分内容的理解），以及几类特殊矩阵的特征值和特征向量（记住这些结论将会大大减轻在考试中的计算量）；知识点 20 则围绕矩阵相似对角化展开，介绍矩阵相似的定义和性质，以及矩阵可相似对角化的充要条件；知识点 21 围绕实对称矩阵的对角化展开，介绍实对称矩阵的特殊性质；知识点 22~24 围绕二次型展开，介绍二次型的基本概念，将一般二次型化为标准型的 2 种方法，以及矩阵的合同和正定性的判断（需要我们深入理解其概念，这也是本部分内容的难点和重点所在）。

本部分 6 个知识点的框架如下：

相似矩阵及二次型	相似矩阵	特征值	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: } \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \lambda \mathbf{x}_{n \times 1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ (}\lambda \text{ 即特征值)} \\ \text{求法: 特征多项式 } \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = 0 \text{ 或者 } \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = 0 \Rightarrow n \text{ 个根就是 } n \text{ 个特征值} \\ \text{性质: } \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{array} \right.$
		特征向量	$\left\{ \begin{array}{l} \text{求法: 齐次线性方程组 } (\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的非零解是特征值 } \lambda_i \text{ 对应的特征向量} \\ \text{性质: 不同特征值对应的特征向量线性无关, 同一特征值的几何重数 } k \leq \text{代数重数 } t \end{array} \right.$
		相似	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: 若 } \mathbf{P} \text{ 可逆且 } \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}, \text{ 称 } \mathbf{A} \text{ 相似于 } \mathbf{B}, \text{ 记为 } \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \\ \text{性质: } \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 的特征值相同, 秩相同 (因此行列式和迹都相同, 且一定等价)} \\ \text{相似对角化 } \mathbf{A} \sim \mathbf{\Lambda} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 有 } n \text{ 个线性无关的特征向量} \Leftrightarrow \text{每个特征值的几何重数 } k = \text{代数重数 } t \end{array} \right.$
	实对称阵	特征值	$\left\{ \begin{array}{l} \text{特征值 } \lambda \text{ 一定是实数} \left\{ \begin{array}{l} \text{不同特征值对应的特征向量正交} \\ \text{同一特征值的几何重数 } k = \text{代数重数 } t \end{array} \right. \\ \text{如果 } \lambda_i \text{ 是特征方程的 } r_i \text{ 重特征根, 则特征值 } \lambda_i \text{ 有 } r_i \text{ 个线性无关的特征向量} \\ \mathbf{A} \text{ 必定相似于 } \mathbf{\Lambda}, \text{ 且存在正交矩阵 } \mathbf{Q} \text{ 使 } \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \end{array} \right.$
		矩阵表示	$f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}, \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 是对称矩阵, } \mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$
		化二次型为标准形或规范形	$\left\{ \begin{array}{l} \text{标准形: } f(\mathbf{Y}) = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2 \\ \text{规范形: } f(\mathbf{Z}) = z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2 \\ \text{做可逆线性变换 } \mathbf{X} = \mathbf{P} \mathbf{Y} \text{ 的方法} \left\{ \begin{array}{l} \text{配方法} \\ \text{正交变换法} \end{array} \right. \\ \text{惯性定理: 正惯性系数 } p, \text{ 负惯性系数 } q, \text{ 符号差 } p - q \end{array} \right.$
	二次型	合同	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: 若 } \mathbf{C} \text{ 可逆且 } \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}, \text{ 则 } \mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 合同} \\ \text{若 } \mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 都是对称矩阵, 则 } \mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 合同的充要条件是 } \mathbf{A} \text{ 和 } \mathbf{B} \text{ 的正、负惯性系数相等} \end{array} \right.$
		正定	$\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: 对任意的列向量 } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ 都有 } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \text{ 则对称矩阵 } \mathbf{A} \text{ 称为正定矩阵} \\ \text{必要条件} \left\{ \begin{array}{l} a_{ii} > 0 \text{ (主对角线上元素为正)} \\ \mathbf{A} > 0 \text{ (行列式大于 0)} \\ \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \text{ (一定为对称矩阵)} \end{array} \right. \\ \text{充要条件} \left\{ \begin{array}{l} \text{所有的特征值都大于 0} \\ \text{所有的顺序主子式都大于 0} \end{array} \right. \\ f \text{ 负定} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{所有的特征值都小于 0} \\ \mathbf{A} \text{ 的顺序主子式负正相间} \end{array} \right. \end{array} \right.$

知识点 19 特征值与特征向量

1. 特征值与特征向量的定义

设 n 阶方阵 A 满足以下条件: 存在数 λ (可为复数) 和非零 n 维列向量 x , 使 $Ax = \lambda x$ 成立, 则称数 λ 是方阵 A 的**特征值**, 称 x 为方阵 A 对应于特征值 λ 的**特征向量**.

2. 特征值与特征向量的求法

由 $Ax = \lambda x$ 可得 $(\lambda E - A)x = 0$, 因为该齐次方程组有非零解 x , 即 $r(\lambda E - A) < n$, 所以 $|\lambda E - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \text{ 记 } f(\lambda) = |\lambda E - A|, \text{ 则 } f(\lambda) \text{ 为 } A \text{ 的**特征多项式**, 它是关于 } \lambda \text{ 的 } n \text{ 次多项式.}$$

注: $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ 也是 A 的特征多项式.

特征值 λ 就是 $f(\lambda)=0$ 的根, 因此, n 阶方阵 A 在复数域上一共有 n 个特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

下面求特征值 λ_i 对应的特征向量 x_i : 由 $Ax = \lambda_i x$ 可知 $(\lambda_i E - A)x = 0$, 求出该齐次方程组的非零解即为特征向量 x_i . 根据知识点 16 可知, 方程组 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 有 $n - r(\lambda_i E - A)$ 个线性无关的非零解, 因此可记 $k_i = n - r(\lambda_i E - A)$, 则 k_i 表示特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量的个数, 并称 k_i 为特征值 λ_i 的**几何重数**.

例 1 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值和对应于特征值的所有特征向量.

解 A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

当 $\lambda_1 = 2$ 时, 解方程 $(2E - A)x = 0$. 由 $2E - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得基础解系 $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以

$kp_1 (k \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1 = 2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(E - A)x = 0$. 由 $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得基础解系 $p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以

以 $kp_2 (k \neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量.

3. 特征值与特征向量的性质

设 A 是 n 阶方阵, 且特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

(1) $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow A$ 的行列式等于所有特征值的积.

(2) $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Rightarrow A$ 的迹等于所有特征值的和.

(3) 任何一个特征值对应的特征向量一定是无穷个.

(4) λ_i 的 m 个特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 的任意非零线性组合 $\sum_{i=1}^m k_i \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ 仍然是 λ_i 的特征向量.

(5) 不同特征值对应的特征向量线性无关.

(6) 若 A 有 t 个相同的特征值 λ , 则称 λ 是 A 的一个 t 重特征值, 并称 t 是特征值 λ 的代数重数. 显然, 所有特征值的代数重数的和为 n .

(7) 特征值 λ 的几何重数 k 小于或等于其代数重数 t , 即 $k \leq t$.

(8) 一个 n 阶方阵至多有 n 个线性无关的特征向量.

(9) 如果 A 的所有特征值互异, 则 A 恰有 n 个线性无关的特征向量, 反之不正确.

(10) 如果每一个特征值的代数重数都等于几何重数, 则 A 有 n 个线性无关的特征向量.

陷阱: 若 A 的特征值中存在 k 个 0, 则 $r(A) = n - k$ 吗?

不一定, 例如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 显然 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$, 则 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 即 $k = 2$. 但是 $r(A) = 1$, 所以 $r(A) \neq n - k$, 事实上, $r(A) \geq n - k$.

4. 特殊矩阵的特征值和特征向量 (必背)

(1) 若 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 则

A	$aA = bE$	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	$a\lambda + b$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$	λ	λ
特征向量	\mathbf{x}	\mathbf{x}	\mathbf{x}	\mathbf{x}	\mathbf{x}	$P^{-1}\mathbf{x}$	无关系

(2) 若 $r(A) = 1$, 则 A 的一个特征值为 $\text{tr}(A)$, 其余特征值均为 0. (证明过程不需要掌握, 会用即可)

例如, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ 的特征值: $\lambda_1 = 1 + 4 - 9 = -4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(3) 若 A 的每一行的行和均为 a , 即等式 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 成立, 则 a 一定为其特征值, 且特征值

a 对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$.

(4) 若 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}$, 其中 A_i 均为方阵, 则 A 的特征值是所有 A_i 的特征值的并集 (若是上三角形

式或下三角形式也正确).

例如, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值均为 1, 5, 0.

(5) 幂等矩阵 $A^2 = A$ 的特征值只能为 0 或 1.

证明: 设 A 对应于特征向量 \mathbf{x} 的特征值为 λ , 则 A^2 对应于特征向量 \mathbf{x} 的特征值为 λ^2 . 由于 $A^2 = A$, 故 $\lambda^2 = \lambda$,

即 $\lambda=0$ 或 1 .

例 2 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是_____.

解 由于 $r(A)=1$, 且 $\text{tr}(A)=n$, 则 A 的 n 个特征值为 1 个 n 和 $(n-1)$ 个 0.

例 3 若矩阵 A 满足 $A^2 + E = 2A$, 则 A 的特征值只能是_____.

解 设 A 对应于特征向量 x 的特征值为 λ , 则 $A^2 + E$ 对应于特征向量 x 的特征值为 $\lambda^2 + 1$. 由于 $A^2 + E = 2A$, 故 $\lambda^2 + 1 = 2\lambda$, 所以 $\lambda = 1$.

例 4 设三阶矩阵 A 的特征值为 $-1, 3, 4$, 则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值为 ().

- A. 12, -4, -3
B. -1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$
C. 2, 5, 6
D. -1, 6, 9

解 因为 $|A| = -1 \times 3 \times 4 = -12 \neq 0$, 则 A 可逆.

由于 $Ax = \lambda x$, 则 $x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow \frac{|A|}{\lambda}x = |A|A^{-1}x$, 所以 $\frac{|A|}{\lambda}x = A^*x$, 即 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$. 由于 $|A| = -12$,

所以 A^* 的特征值为 12, -4, -3, 故选择 A.

知识点 20 矩阵相似对角化

对于 n 阶矩阵 A, B , 若存在 n 阶可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 和 B 相似, 记为 $A \sim B$. A 和 B 相似有以下性质成立:

(1) A 和 B 等价, 即 $r(A) = r(B)$.

(2) A 和 B 的特征值相同, 进而可推出 A 和 B 的行列式和迹都相同.

(3) A 和 B 同一特征值对应的线性无关的特征向量个数相同, 即 $r(\lambda E - A) = r(\lambda E - B)$.

定理: 若 A 相似于一个对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 一定是 A 的特征值, 称 A 可相似

对角化, 或简称为 A 可对角化.

此时, $P^{-1}AP = A$, 且 $P = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, 其中 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 A 的特征值 λ_i 对应的特征向量.

技巧:

因为乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 则 $r(A) = r(A)$, 所以如果 A 的特征值中存在 k 个 0, 且 A 可对角化, 则 $r(A) = n - k$.

考试中关于同阶方阵 A 和 B 相似的判别方法:

- (1) 如果 A 和 B 都可相似对角化, 且相似于同一个对角矩阵, 则 $A \sim B$.
- (2) 如果 A 和 B 均为对称矩阵, 且 A 和 B 的特征值相同, 则 $A \sim B$.
- (3) 如果 $A \sim C, B \sim C$, 则根据传递性可知 $A \sim B$.

矩阵 A 可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量.

由特征值和特征向量的性质可知, A 可对角化要求 A 的特征值 λ_i 的代数重数 t_i 等于几何重数 k_i . 因此, 要想判断 A 是否可相似对角化, 只需验证有 2 个或 2 个以上相同特征值对应的代数重数和几何重数是否相等. 特别地, 若 A 的每个特征值均互异, 则 A 一定可相似对角化.

例 1 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 可相似对角化, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 n 阶矩阵可相似对角化的条件是有 n 个线性无关的特征向量.

$$\text{由 } |\lambda E - A| = 0 \text{ 得 } \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda - 1 & -x \\ -4 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 6) = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 6.$$

$$\text{当 } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ 时, 由 } r(E - A) = 1 \text{ 得 } \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -x \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } x = 3.$$

例 2 证明: 若 $A^2 = A$, 则 A 相似于对角矩阵, 且 $\text{tr}(A) = r(A)$.

证明 由 $A^2 = A$ 可得 $\lambda = 1$ 或 0. $\lambda = 1$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n - r(E - A)$, $\lambda = 0$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n - r(-A) = n - r(A)$.

由于 $r(E - A) + r(A) \geq r(E - A + A) = r(E) = n$, 且 $r[(E - A)A] = r(A - A^2) = r(A - A) = 0$, 则 $r(E - A) + r(A) - n \leq r[(E - A)A] = 0$, 即 $r(E - A) + r(A) \leq n$. 因此, $r(E - A) + r(A) = n$, $n -$

$r(E-A) + n - r(A) = 2n - n = n$, 即 A 有 n 个线性无关的特征向量, 从而得出 A 相似于对角矩阵 Λ , 且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 的个数和 } 0 \text{ 的个数之和为 } n).$$

根据 $P^{-1}AP = \Lambda$, 由于 P 可逆, 则 $r(A) = r(\Lambda)$. 假设有 k 个特征值为 1, 则 $r(A) = k$.

由于 $\text{tr}(A) = k \times 1 + (n-k) \times 0 = k$ (所有特征值之和等于矩阵的迹), 所以 $r(A) = \text{tr}(A)$.

知识点 21 实对称矩阵的对角化

设 A 是一个实对称矩阵, 即 A 的每一个元素 a_{ij} 都是实数, 且 $A = A^T$, 则 A 的特征向量具有以下性质:

- (1) 不同特征值对应的特征向量正交 (由于特征向量不为零向量, 所以一定线性无关).
- (2) 同一特征值的代数重数 t 一定等于几何重数 k .

因此, 实对称矩阵 A 一定可相似对角化.

下面给出正交矩阵的概念.

设 A 为 n 阶矩阵, 若 $A^T A = E$ 或 $AA^T = E$, 就称 A 为**正交矩阵**. 显然, 根据定义, 正交矩阵满足 $A^{-1} = A^T$.

A 为正交矩阵的充要条件是 A 的列 (行) 向量组为 \mathbf{R}^n 的一组标准正交基.

将 A 按列分块, 即 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 则 $\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

对于一个实对称矩阵 A , 由于 A 可相似对角化, 故存在可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

将 P 矩阵列分块, $P = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, 则 x_i 是特征值 λ_i 对应的特征向量.

下面将 P 矩阵转换为正交矩阵 Q :

不失一般性, 假设 A 是三阶实对称矩阵, 且 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, 3 个特征值对应的特征向量为 x_1, x_2, x_3 , 则由

实对称矩阵的性质可知, x_1 和 x_2 线性无关, x_3 与 x_1 和 x_2 均正交, $P = [x_1, x_2, x_3]$. 显然, x_1, x_2, x_3 是

欧氏空间 \mathbf{R}^3 中的线性无关组, 可利用施密特正交化方法将其正交化. 令 $\beta_1 = x_1$, $\beta_2 = x_2 - \frac{(x_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$. 则

$$(\beta_1, \beta_2) = \left(x_1, x_2 - \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)}x_1 \right) = (x_1, x_2) - \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)} \cdot (x_1, x_1) = (x_1, x_2) - (x_2, x_1) = 0, \text{ 即 } \beta_1, \beta_2 \text{ 正交,}$$

又由于 x_3 和 x_1, x_2 正交, 且 β_1, β_2 都是 x_1 和 x_2 的线性组合, 则 β_1, β_2, x_3 相互正交, 所以可对其标准化. 令

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \alpha_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \alpha_3 = \frac{x_3}{|x_3|}, Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \text{ 显然 } Q \text{ 是正交矩阵. 根据特征向量的性质, 若 } x_1, x_2 \text{ 是 } \lambda$$

的特征向量, 则只要 $k_1 x_1 + k_2 x_2$ 不是零向量, 仍然是 λ 的特征向量, 所以 α_1, α_2 是 λ_1, λ_2 的特征向量, 因此

$$Q^{-1}AQ = \Lambda, \text{ 又由于正交矩阵满足 } Q^{-1} = Q^T, \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda.$$

事实上,通过施密特正交化方法和标准化,对于任意实对称矩阵 A ,总可以找到正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

例 1 设 A 为三阶非零矩阵,且 $A^T = A^*$, 证明: A 为正交矩阵.

证明 (1) 若 $r(A) = 2$, 则 $r(A^*) = 1$, $r(A^T) = 2$, 与 $A^T = A^*$ 矛盾.

(2) 若 $r(A) = 1$, 则 $r(A^*) = 0$, $r(A^T) = 1$ 与 $A^T = A^*$ 矛盾.

(3) 由于 A 不是零矩阵,则 $r(A) = 3$, 所以 A 可逆且 $|A| \neq 0$, 可得 $A^* = A^T \Rightarrow A^{-1}|A| = A^T \Rightarrow AA^T = |A|E$,

又由于 $|A^{-1}|A| = |A^T| \Rightarrow \frac{|A|^3}{|A|} = |A|E$, 即 $|A| = 1$, 则 $AA^T = E$, 所以 A 为正交矩阵.

知识点 22 二次型

1. 二次型的定义

关于 n 个未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次多项式

$$\begin{aligned} f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ &\quad a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ &\quad a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = X^T A X \text{ (或记为 } x^T A x \text{)} \end{aligned}$$

称为一个 n 元二次型, A 称为二次型的矩阵.

一般将 A 写成一个对称矩阵, 即 $a_{ij} = a_{ji}$, 使系数平均分配.

例如, $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, 可用矩阵表示为:

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2. 化二次型为标准形或规范形

如果通过适当的变量将 $f(X)$ 变换为 $a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \dots + a_ny_n^2$ (a_i 为实数) 的形式, 则称这种二次型为**标准形**, 若进一步变形为 $z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2$ 的形式, 则称为**规范形**. 其中 p 是正惯性系数, q 是负惯性系数. 显然, 规范形是标准形的一种特殊情况.

在考试中, 通过令 $X = PY$ 将普通二次型 $f(X)$ 转换为标准形 $f(Y)$ 或规范形 $f(Z)$ 的方法称为**可逆线性变换**, 下面分别介绍两种常见的可逆线性变换方法.

(1) 配方法.

例如, 将 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 用配方法化为标准形、规范形.

分析: 从式子左边找到一个系数不为 0 的 x_i^2 , 并将所有含 x_i 的项集中在一起, 配完全平方; 依次进行, 直

至每一项都配完全平方. 完全平方公式: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 = 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2 - 4x_1x_3 \\
 &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_3 - x_1^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_3 \\
 &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - x_1^2 - 7x_3^2 - 8x_1x_3 \\
 &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (x_1 + 4x_3)^2 - 7x_3^2 + 16x_3^2 \\
 &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - (x_1 + 4x_3)^2 + 9x_3^2.
 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_1 + 4x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$ 则 $f(\mathbf{Y}) = y_1^2 - y_2^2 + 9y_3^2$ (标准形). 其中

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{注: 变换过程要写 } \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y} \text{ 形式}) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

则 $\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为变换矩阵, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = 3y_3, \\ z_3 = y_2, \end{cases}$ 则 $f(\mathbf{Z}) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ (规范形). 其中

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

记 $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_2\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}$, $\mathbf{X} = \mathbf{C}_1\mathbf{Y} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}$.

(2) 正交变换法.

以三元二次型为例, $f(\mathbf{X}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记为}}{=} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$.

由于 \mathbf{A} 是实对称矩阵, \mathbf{A} 一定可相似对角化, 则存在可逆矩阵 \mathbf{P} 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, 而 \mathbf{P} 可以变换为正交矩阵 \mathbf{Q} , 则 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$. 记 $\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$, 则 $f = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Y} \Rightarrow f(\mathbf{Y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$.

例如, 将 $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 用正交变换法化为标准形、规范形.

记 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, 令 $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$.

下面分别求特征向量, 易求得:

当 $\lambda_1 = 1$ 时, $\xi_1 = [2, 0, -1]^T$;

当 $\lambda_2 = 6$ 时, $\xi_2 = [1, 5, 2]^T$;

当 $\lambda_3 = -6$ 时, $\xi_3 = [1, -1, 2]^T$.

因为对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交, 因此可将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 标准化:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

则 $P = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$ 即标准形变换的正交矩阵. 令 $X = PY$, 则 $f(Y) = y_1^2 + 6y_2^2 - 6y_3^2$.

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \sqrt{6}y_2, \\ z_3 = \sqrt{6}y_3, \end{cases} \text{ 则 } f(Z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 \text{ (规范形). 其中}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = QZ,$$

则变换矩阵 $C = PQ$, 从而 $X = PY = PQZ = CZ$.

通过以上 2 种方法, 可以发现, 同一个二次型 $f(X)$ 在经过 2 种不同可逆线性变换后, 得到的标准形 $f(Y)$ 或规范形 $f(Z)$ 中每一项的系数是不同的, 但是其系数为正数的项与系数为负数的项的数量是相同的, 在以上举的例子中, 系数为正数项的数量为 2, 系数为负数项的数量为 1.

这一有趣的现象在教材中被称为**惯性定理**: 实二次型 $f(X) = X^T AX$ 经过可逆线性变换为标准形时, 其标准形中正负数项的项数是唯一确定的, 它们的和等于矩阵 A 的秩, 且称正数项的个数为**正惯性系数**, 负数项的个数为**负惯性系数**, 正惯性系数减去负惯性系数的差值称为**符号差**.

知识点 23 矩阵的合同

设 A 和 B 为 n 阶方阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^T AP = B$, 则称 A 与 B **合同**, 记为 $A \simeq B$.

合同的性质: 若 $A \simeq B$, 则 $r(A) = r(B)$, 即若两个矩阵合同, 那么它们一定等价.

定理: 两个同阶对称矩阵合同 \Rightarrow 正、负惯性系数相等.

对于实对称矩阵, 正惯性系数个数等于正特征值个数, 负惯性系数个数等于负特征值个数.

$$\text{例如, } \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \text{ 一定合同.}$$

陷阱: 只有对称矩阵才能通过判断正、负惯性系数是否相等来判断合同; 对于一般矩阵, 只能通过定义来判断. (考试中会考判断题, 需要引起足够的重视)

知识点 24 正定二次型和正定矩阵

1. 正定二次型的定义

设 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$, 若对于任何非零列向量 $x \in \mathbf{R}^n$, 均满足 $x^T Ax > 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为**正定二次型**, 同时称二次型矩阵 A 为**正定矩阵**. 注: 若 $x^T Ax \geq 0$, 则称 A 为**半正定矩阵**.

2. 正定矩阵的必要条件

若 A 正定, 则 $\begin{cases} a_{ii} > 0 \text{ (主对角线上元素为正)}, \\ |A| > 0 \text{ (行列式大于0)}, \\ A^T = A \text{ (一定为对称矩阵)}. \end{cases}$

3. 正定矩阵的充要条件

f 正定
 $\iff A$ 正定
 $\iff A^{-1}$ 正定
 \iff 所有特征值 $\lambda_i > 0$
 \iff 正惯性系数 $p = n$
 $\iff n$ 个顺序主子式均大于 0
 $\iff A$ 合同于单位矩阵 E
 \iff 存在可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = E$.

4. 负定矩阵

若对于任意非零列向量 $x \in \mathbf{R}^n$, 均满足 $x^T A x < 0$, 则对称矩阵 A 是负定矩阵.

充要条件:

- (1) A 的所有特征值均小于 0.
- (2) A 的偶数阶顺序主子式大于 0, 奇数阶顺序主子式小于 0 (负正相间).

【重要题型】

题型 1 求特征值

例 1 A 为 n 阶方阵, 且 $AA^T = E$, $|A| \leq 0$, 证明: $\lambda = 1$ 是 $(A^{-1})^*$ 的特征值 (不考虑特征值为虚数).

证明 由 $AA^T = E$ 可知 A 是正交矩阵. 设 A 的特征值为 λ , 则 $Ax = \lambda x$, 两边求转置得 $x^T A^T = \lambda x^T$, 所以 $x^T A^T A x = \lambda x^T \lambda x$, 即 $x^T x = \lambda^2 x^T x$, 故 $\lambda^2 = 1$. 不考虑特征值为虚数时, 特征值 λ 只能为 1 或者 -1.

由于 $|A| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n \leq 0$, 则 A 至少有一个特征值为 -1, 且 $|A| = -1$. 由于 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|} = -A$, 而 $-A$ 的特征值与 A 的特征值互为相反数, 因为 A 至少有一个特征值为 -1, 所以 $(A^{-1})^*$ 至少有一个特征值为 1.

例 2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的三维列向量, 若 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $BA = [\alpha_2, \alpha_1, 2\alpha_3]$, 则 B 的特征值为 ().

A. -1, 1, 2

B. -1, -1, 2

C. 1, 1, 2

D. 0, 1, 2

解 依题意可知 $A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = BA$, 则 $B = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} A^{-1}$, 所以 B 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 相似.

令 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $\det(\lambda E - H) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)$, 则 H 的特征值为 $-1, 1, 2$, 所以 B 的特征值也为 $-1, 1, 2$, 故选择 A.

例 3 设三阶方阵 A 的特征值为 $1, 1, 5$, 则方阵 $E + A^{-1}$ 的特征值为_____.

解 A^{-1} 的特征值为 $1, 1, \frac{1}{5}$, 则 $E + A^{-1}$ 的特征值为 $2, 2, \frac{6}{5}$.

例 4 已知 $A_{3 \times 3}$ 的特征值为 $1, 2, 3$, 求 A^* 的特征值.

解 $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$, 则 A 可逆. $A^* = |A|A^{-1}$, 所以 A^* 的特征值为 $\frac{6}{1} = 6, \frac{6}{2} = 3, \frac{6}{3} = 2$.

题型 2 求特征向量

例 5 设 A 为 n 阶方阵, 且 $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2$ (p_1, p_2 为非零向量), 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则以下结论中正确的是 ().

- A. $p_1 + p_2$ 不一定是 A 的特征向量 B. $p_1 + p_2$ 一定不是 A 的特征向量
C. $p_1 + p_2$ 一定是 A 的特征向量 D. $p_1 + p_2$ 为零向量

解 由于不同特征值对应的特征向量线性无关, 因此 p_1 和 p_2 线性无关.

反证法: 假设 $p_1 + p_2$ 是 A 对应于特征值 λ_3 的特征向量, 即 $A(p_1 + p_2) = \lambda_3(p_1 + p_2)$, 代入题干条件可得: $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda_3 p_1 + \lambda_3 p_2 \implies (\lambda_1 - \lambda_3)p_1 = (\lambda_3 - \lambda_2)p_2$. 因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 且 p_1, p_2 为非零向量, 所以 $\lambda_1 - \lambda_3$ 和 $\lambda_3 - \lambda_2$ 不可能为 0, 则 p_1 和 p_2 线性相关, 出现了矛盾, 所以 $p_1 + p_2$ 一定不是 A 的特征向量, 故选择 B.

例 6 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$, 向量 $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 都是 A 对应于特征

值 4 的特征向量, 则 A 对应于 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量 x_3 是 ().

- A. x_1, x_2 中的某一个 B. $[2, 1, -1]$
C. $[0, 1, -1]$ D. 从已知条件无法确定

解 依题意可知 x_3 与 x_1 和 x_2 正交, 则设 $x_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, 由 $x_3^T x_2 = 0$ 可知 $b = -c$, 由 $x_3^T x_1 = 0$ 可知 $a + b + c = 0$,

所以 $a = 0$, 取 $b = 1$, 故选择 C.

题型 3 已知特征值或特征向量求未知参数

例 7 若 $\xi = [-1, -1, 1]^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & b & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $a =$ _____.

解 由 $A\xi = \lambda\xi$ 可得 $\begin{bmatrix} a-5 \\ 1-b \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以 $\lambda = 3$, $a = 2$, $b = 4$.

例 8 设 $\alpha_1 = [-1, -1, 1]^T$, $\alpha_2 = [1, x, 2]^T$ 是实对称矩阵 A 的属于不同特征值所对应的特征向量, 则参数 $x =$ _____.

解 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交, 因此 $\alpha_1^T \alpha_2 = 0$, 即 $x = -1$.

例 9 设 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 3 & b \end{bmatrix}$ 的一个特征向量, 则 $a - b =$ _____.

解 由于 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是特征向量, 则该矩阵每一行的和都相等, 所以 $0 + a + 1 = 2 + 3 + b$, 则 $a - b = 4$.

题型 4 求矩阵的高次幂

例 10 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求:

(1) A 的特征值与特征向量.

(2) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = A$ 为对角矩阵.

(3) A^{2016} .

解 (1) 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$ 可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

当 $\lambda = -2$ 时, 由 $A + 2E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可得 $k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($k_1 \neq 0$) 为对应的全部特征向量.

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $A + E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可得 $k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($k_2 \neq 0$) 为对应的全部特征向量.

当 $\lambda = 0$ 时, 由 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可得 $k_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ($k_3 \neq 0$) 为对应的全部特征向量.

(2) 可取可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 有 $P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 为对角矩阵.

(3) $A^{2016} = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1}) = PA^{2016}P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0.5 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2^{2016} & 2^{2016} & 2^{2015} \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2^{2016} & 2^{2016}-1 & 2^{2015}-2 \\ 2-2^{2017} & 2^{2017}-1 & 2^{2016}-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

题型 5 相似矩阵

例 11 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$ 相似, 求 a, b, c .

解 由于 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$ 相似, 那么 A 和 B 有相同的特征值, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$,

$$\det(A) = \det(B).$$

由于 B 的特征值为对角线上的元素 $-1, 2, c$, 那么 A 也有这 3 个特征值.

由于 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$ 是下三角形的分块矩阵, 所以其特征值为 -2 以及 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 这 2 个特征值, 那么 $c = -2$.

由于 $\det(B) = -1 \times 2 \times (-2) = 4$, $\text{tr}(B) = -1 + 2 + (-2) = -1$, 因此 $\det(A) = -2 \times (ab - 2) = 4$,

$\text{tr}(A) = a + b - 2 = -1$, 解得 $a = 0, b = 1$ (或者 $a = 1, b = 0$).

例 12 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似, 求:

(1) x, y .

(2) 求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = A$.

(3) A^{100} .

解 (1) 将 A 分块, 则 A 的一个特征值为 -2 . 由于 A 和 A 相似, 则它们的特征值相同. 由于 A 的特征值为 $-1, 2, y$, 则 $y = -2$. 由 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ 可得 $x - 1 = y + 1$, 则 $x = 0$.

(2) 先求特征值对应的特征向量:

$$\text{当 } \lambda_1 = -1 \text{ 时, } \lambda_1 E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{当 } \lambda_2 = 2 \text{ 时, } \lambda_2 E - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{当 } \lambda_3 = -2 \text{ 时, } \lambda_3 E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{由此可得 } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $P^{-1}AP = A \Rightarrow A = PAP^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
 A^{100} &= P A^{100} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{100} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \times 2^{100} & 0 & 0 \\ -2 + 2^{101} & 2 + 2^{100} & -2 + 2^{101} \\ 1 - 2^{100} & 2^{100} - 1 & 1 + 2^{101} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

题型 6 二次型的标准化

例 13 已知二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4yz + z^2$, 试用正交变换法将此二次型化为标准形, 给出其标准形以及所使用的正交变换矩阵.

解 $f(x, y, z) = x^2 + 4xy + 4xz + y^2 + 4yz + z^2$ 对应的矩阵形式为:

$$f(x, y, z) = [x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 那么由于 A 是对称矩阵, 所以 A 一定可以相似对角化.

令 $\det(A - \lambda E) = 0$, 所以 $(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$, 解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 根据 $(A - \lambda E)x = 0$ 可以解得对应的特征向量为 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. 将其进行施密特

正交化, 则 $q_1 = p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $q_2 = p_2 - \frac{q_1 p_2}{q_1 q_1} q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 单位化后为 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$. 同理, 当 $\lambda_3 = 5$ 时对应的标准化后的特征向量为 $\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

由此可得所使用的正交变换矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (P 正交), 因此

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{bmatrix} P^{-1} \Rightarrow P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{利用 } P^{-1} = P^T).$$

令 $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $X = PV$, 所以

$$f(x, y, z) = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = V^T P^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} P V = V^T \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} V.$$

因此, 标准形为 $f = -v_1^2 - v_2^2 + 5v_3^2$.

例 14 写出二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 在正交变换下所形成的标准形, 并指出 f 是否是正定的.

解 二次型对应的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 因为

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -2+\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2), \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$, 故二次型 f 经正交变换化为标准形 $f = 2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$. 由于特征值不全为正数, 所以 f 不是正定的.

题型 7 正定矩阵的性质和证明

例 15 设 A 为正定矩阵, 证明: A 对角线上的元素均大于 0.

证明 由定义可知 A 正定 $\iff \forall n$ 维非零列向量 x , 均满足 $x^T A x > 0$.

$$\text{取 } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } x_1^T A x_1 = a_{11} > 0, x_2^T A x_2 = a_{22} > 0, \dots, x_n^T A x_n = a_{nn} > 0,$$

即主对角线上的元素均大于 0.

例 16 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正定, 则 t 应当满足的条件是

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & t \\ 0 & t & 6 \end{bmatrix}$, 由 A 正定可得 $\begin{cases} 1 > 0, \\ 1 \times 4 - 1 \times 1 > 0, \\ |A| = 18 - t^2 > 0, \end{cases}$ 所以 $-3\sqrt{2} < t < 3\sqrt{2}$.

例 17 设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵, 证明: $A+B$ 也是 n 阶正定矩阵.

证明 由于 A 和 B 都正定, 则 A 和 B 均为对称矩阵, 且对于任意非零 n 维列向量 x , 均满足 $x^T A x > 0$, $x^T B x > 0$.

由于 $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$, 即 $A+B$ 为对称矩阵, 又由于 $x^T (A+B)x = x^T A x + x^T B x > 0$, 所以 $A+B$ 也是 n 阶正定矩阵.

注: 证明矩阵为正定矩阵之前要先证明它是对称矩阵.

例 18 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵, 且 $r(A) = n$, 证明: $A^T A$ 是正定矩阵.

证明 因为 $(A^T A)^T = A^T A$, 则 $A^T A$ 是实对称矩阵. 又由于 $r(A) = n$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解. 因此, $\forall x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$, 有 $x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) > 0$, 故 $A^T A$ 是正定矩阵.

题型 8 正交矩阵的性质和证明

例 19 若 A 是正交矩阵, 证明: A 可逆且 A^{-1} 也是正交矩阵.

证明 由于 A 是正交矩阵, $A^T A = E$. 根据可逆的定义, $A^{-1} = A^T$. 由于 $A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = E^{-1} = E$, 故 A^{-1} 也是正交矩阵.

例 20 判断: 设 n 阶方阵 A 和 B 均为正交矩阵, 则 AB 也为正交矩阵. ()

解 正确. $A^T A = E, B^T B = E$, 则 $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T EB = E$, 则 AB 也是正交矩阵.

例 21 设 n 阶矩阵 A 为实对称矩阵, A 的所有特征值的绝对值为 1, 证明: A 为正交矩阵.

证明 由于 A 为实对称矩阵, A 可相似对角化, 则存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

两边同时转置可得 $Q^T A^T Q = A$, 则 $Q^T A Q Q^T A^T Q = A^2 = E, Q^T A A^T Q = E$ (A 的所有特征值的绝对值为 1), $AA^T = (Q^T)^{-1} E Q^{-1} = (Q^T)^{-1} Q^{-1} = (QQ^T)^{-1} = E^{-1} = E$, 即 A 是正交矩阵.

【精选习题】

基础篇

1. 若 n 阶矩阵 A 的特征值为 $0, 1, 2, \dots, n-1$, 且 B 相似于 A , 则 $|B + E| =$ _____.
2. 二次型 $f = -x^2 - y^2 - z^2 + axy$ 是负定二次型, 则 a 的取值范围是 _____.
3. 设 α 为三维实单位列向量, 且 $A = E + k\alpha\alpha^T$ 为正定矩阵, 则 k 的取值范围为 _____.
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2$ 的正惯性系数 $p =$ _____, 负惯性系数 $q =$ _____.
5. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix}$, 若 $\alpha = [1, -2, 3]^T$ 是其特征向量, 则 $a+b =$ _____.
6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$, 则 λ, μ 为何值时 A 与 A 相似?
7. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^{2016} .
8. 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 化为标准形, 并写出所用的正交变换矩阵 $X = PY$.
9. 设 A 是实对称正定矩阵, 若 k 是某个确定的正整数, 且满足 $A^k = E$, 证明: $A = E$.

10. 设 A 为 n 阶正定矩阵, 证明: 对于任意的可逆矩阵 P , P^TAP 为正定矩阵.

提高篇

11. 设 $A_{n \times n}$ 是一个实对称矩阵, 且存在整数 $m \geq 1$ 使得 $A^m = O$, 则 $A =$ _____.
12. 若 α 是 n 维单位向量, 求 $\alpha\alpha^T$ 的特征值.
13. 已知 A 正定, B 正定, $AB=BA$, 证明: AB 也正定.
14. 已知五阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 $r(A) = 3$, 求矩阵 $2E - A$ 的行列式.
15. 已知 A 为实对称矩阵, 若 A 的阶数为 n (n 为一个奇数) 且 $|A| > 0$, 证明: 存在 $X_{n \times 1}$ 使得 $X^TAX > 0$.